ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG THƯƠNG

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANT LIÊN QUAN ĐẾN SỐ CÂN BẰNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG THƯƠNG

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANT LIÊN QUAN ĐẾN SỐ CÂN BẰNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số: **8 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên - 2018

Mục lục

Lời cảm ơn **iii**

Mở đầu **1**

Chương 1 . Một số tính chất của số cân bằng **3**

1.1 Khái niệm về số cân bằng 3

1.2 Khái niệm số tam giác chính phương 4

1.3 Khái niệm số đối cân bằng 5

1.4 Một số dãy liên quan 7

1.5 Một số tính chất 9

1.6 Một số kết quả của Keskin và Karaatli 13

Chương 2 . Một số phương trình Diophant liên quan đến số cân bằng **24**

2.1 Nghiệm nguyên dương của phương trình Pell 25

2.2 Nghiệm nguyên dương của một số phương trình Diophant 26

2.3 Lũy thừa trong dãy các số cân bằng và các số Lucas cân bằng 38

2.4 Lũy thừa trong tích các số hạng của các số cân bằng . . 45

2.5 Lũy thừa trong tích của các số Lucas cân bằng 49

Kết luận **56**

Tài liệu tham khảo **57**

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Ngô Văn Định, Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới TS. Ngô Văn Định, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Phòng Đào tạo, các thầy cô giáo dạy cao học chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp, trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn tốt nghiệp.

Tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, người thân đã luôn động viên, cổ vũ, tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Thị Hồng Thương

Mở đầu

Một số tự nhiên n được gọi là số cân bằng với hệ số cân bằng r nếu nó là nghiệm của phương trình Diophant

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r).$$

Khái niệm về số cân bằng được tìm ra và nghiên cứu đầu tiên bởi Behera và Panda. Sau đó, rất nhiều tính chất đẹp của số cân bằng được tìm thấy (xem [1]). Năm 2012, Keskin và Karaatli [4] đã tìm ra một số tính chất mới của số cân bằng, số tam giác chính phương. Bên cạnh việc nghiên cứu các tính chất của số cân bằng, nhiều nhà toán học cũng đã nghiên cứu việc sử dụng các số cân bằng để giải một số dạng phương trình Diophant.

Mục đích của luận văn là nghiên cứu và trình bày lại một số tính chất mới của số cân bằng, số tam giác chính phương và một số kết quả về việc sử dụng số cân bằng, số Pell, số Lucas cân bằng trong việc giải phương trình Diophant.

Cấu trúc của luận văn

Luận văn được trình bày thành 2 chương:

• Chương 1. Một số tính chất mới của số cân bằng. Mục đích của Chương này là giới thiệu sơ lược về số cân bằng, số tam giác chính phương và trình bày lại kết quả của Keskin và Karaatli [4].

• Chương 2. Một số phương trình Diophant liên quan đến số cân bằng. Mục đích của Chương này là trình bày lại một số kết quả về phương trình Diophant có liên quan đến số cân bằng. Tài liệu tham khảo chính của chương này là [2, 3].

Chương 1

Một số tính chất của số cân bằng

Chương này trình bày các khái niệm về số cân bằng, số đối cân bằng, số tam giác, số tam giác chính phương và một số tính chất của số cân bằng được trình bày trong tài liệu [4].

1.1 Khái niệm về số cân bằng

Định nghĩa 1.1.1. Số nguyên dương n được gọi là *số cân bằng* nếu

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \qquad (1.1)$$

với một số nguyên dương r nào đó. Ở đây r được gọi là *hệ số cân bằng* ứng với số cân bằng n.

Ví dụ 1.1.2. Các số $6, 35$ và 204 là các số cân bằng với các hệ số cân bằng lần lượt là $2, 14$ và 84.

Mệnh đề 1.1.3. Nếu n là một số cân bằng với hệ số cân bằng tương ứng là r thì

$$n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2} \qquad (1.2)$$

và do đó

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2} \qquad (1.3)$$

Chứng minh. Từ (1.1), ta có

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r)$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)n}{2} = rn + \frac{r(r+1)}{2}$$

$$\Rightarrow n^2 - n = 2rn + r^2 + r \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2n^2 = n^2 + 2rn + r^2 + n + r$$

$$\Rightarrow 2n^2 = (n+r)^2 + n + r$$

$$\Rightarrow 2n^2 = (n+r)(n+r+1)$$

$$\Rightarrow n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}$$

Thêm nữa, từ (*) suy ra

$$r^2 + (2n+1)r - n^2 + n = 0.$$

Ta có $\Delta = 8n^2 + 1 > 0$, suy ra

$$r = \frac{-(2n+1) \pm \sqrt{8n^2+1}}{2}.$$

Vì r nguyên dương nên

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

1.2 Khái niệm số tam giác chính phương

Định nghĩa 1.2.1. *Số tam giác* là số có dạng $1+2+\cdots+n$ với $n \in \mathbb{Z}^+$.

Nhận xét 1.2.2. Dễ thấy số N là số tam giác nếu N có thể viết dưới dạng $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Định nghĩa 1.2.3. Số N là *số tam giác chính phương* nếu nó vừa có thể viết dưới dạng $N = m^2$ vừa có thể viết dưới dạng $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$, tức là nghiệm nguyên của phương trình

$$m^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nhận xét 1.2.4.

1. Số nguyên dương n là số cân bằng nếu và chỉ nếu n^2 là số tam giác. Do đó n là số cân bằng nếu và chỉ nếu n^2 là số tam giác chính phương.

2. Số nguyên dương n là số cân bằng nếu và chỉ nếu $8n^2 + 1$ là số chính phương.

1.3 Khái niệm số đối cân bằng

Định nghĩa 1.3.1. Số nguyên dương n được gọi là *số đối cân bằng* nếu

$$1 + 2 + \cdots + n = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \qquad (1.4)$$

với một số nguyên dương r nào đó. Ở đây r được gọi là *hệ số đối cân bằng* ứng với số đối cân bằng n.

Ví dụ 1.3.2. Các số $2, 14$ và 84 là các số cân bằng với các hệ số đối cân bằng lần lượt là $1, 6$ và 35.

Mệnh đề 1.3.3. Nếu n là một số đối cân bằng với hệ số đối cân bằng